Tentamen Fouriertheorie
30/10/07, 9.00 – 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 9 vraagstukken. Elk vraagstuk is 10 punten waard. Bij deelvragen staat het aantal punten tussen rechte haken. Het cijfer wordt berekend volgens

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{10}.$$

1. Gegeven is de lineaire ruimte E voorzien van de norm $\|\cdot\|$.
   (a) [4] Aan welke eigenschappen voldoet een norm?
   (b) [4] Wat betekent 'x_n is een Cauchy-rij in E'?
   (c) [2] Wat betekent 'de ruimte E is volledig m.b.t. de norm $\|\cdot\|$'?

2. De rij van functies $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{als } |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{als } |x - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2n} \end{cases}.$$

   Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

3. Leg uit waarom $\mathbb{Q}$ (de verzameling van rationale getallen) maat nul heeft.

4. Geef een voorbeeld van een functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zodat $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$ en $f \notin \mathcal{L}^2[0,1]$.

5. Formuleer de stelling van Dirichlet over convergentie van Fourierreeksen.

6. De 2π-periodieke functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

   (a) [6] Laat zien dat de Fourierreeks van f wordt gegeven door

$$R(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16n^2 - 1} \cos(nx).$$

   Aanwijzing: gebruik de gelijkheden

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\sin(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)], \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]. \end{aligned}$$

   (b) [4] Convergeert de reeks $R(x)$ uniform naar $f(x)$?

Zie ommezijde!

7. Laat $0 < r < 1$ een vast getal zijn en beschouw de Fourierreeks

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx}.$$

   (a) [4] Toon aan dat de reeks $R(x)$ uniform convergeert.

   (b) [6] Toon aan dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(nx) = \frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$

8. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd als

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{als } |x| > 1 \end{cases}.$$

   Laat zien dat de Fouriergetransformeerde wordt gegeven door

$$\widehat{f}(y) = \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y}.$$

9. Gegeven is de functie $f(x) = e^{-a|x|}$ waarbij $a > 0$. Laat zien dat de Fouriergetransformeerde wordt gegeven door

$$\widehat{f}(y) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 y^2}.$$